Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

Модуль «Алгебра»

21 Упростите выражение $\frac{6}{a-1}-\frac{10}{(a-1)^2}:\frac{10}{a^2-1}-\frac{2a+2}{a-1}$.

Решение.

1) $\frac{10}{(a-1)^2}:\frac{10}{a^2-1}=\frac{10(a^2-1)}{(a-1)^2\cdot 10}=\frac{(a-1)(a+1)}{(a-1)^2}=\frac{a+1}{a-1}$.

2) $\frac{6}{a-1}-\frac{a+1}{a-1}-\frac{2a+2}{a-1}=\frac{6-a-1-2a-2}{a-1}=\frac{3-3a}{a-1}=-3$.

Ответ: –3.

Комментарий. Ошибки в применении формул, а также в применении правила деления дробей считаются существенными; при их наличии решение не засчитывается.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Все преобразования выполнены верно, получен верный ответ	2
По ходу решения допущена одна ошибка вычислительного характера/описка, с её учётом решение доведено до конца	1
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0
Максимальный балл	2

22 Фирма B может выполнить заказ на производство игрушек на 4 дня быстрее, чем фирма A. При совместной работе эти фирмы за 24 дня выполняют заказ, в 5 раз больший, чем данный. За какое время может выполнить данный заказ каждая фирма?

Решение.

Пусть фирма A может выполнить заказ за x дней, тогда фирма B – за $(x-4)$ дней. За один день фирма A выполняет $\frac{1}{x}$ часть всей работы, а фирма B $\frac{1}{x-4}$ часть. Составим уравнение:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-4}=\frac{5}{24};\quad 5x^2-68x+96=0.$$

Корни уравнения: 12 и 1,6, второй корень не подходит, так как $x>4$.

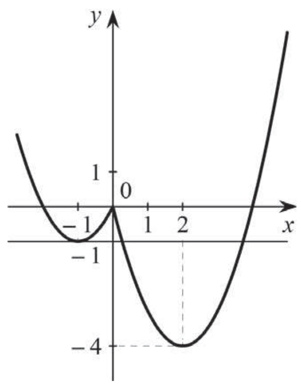
Ответ: фирма A за 12 дней, фирма B за 8 дней.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Решение задачи верно, получен верный ответ	3
По ходу решения допущена одна ошибка вычислительного характера/описка, с её учётом решение доведено до конца	2
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0
Максимальный балл	3

23 Постройте график функции $y = x^2 - 3|x| - x$ и определите, при каких значениях c прямая $y = c$ имеет с графиком три общие точки.

Решение.

$$y = x^2 - 3|x| - x; \quad y = \begin{cases} x^2 - 4x, & x \geq 0, \\ x^2 + 2x, & x < 0. \end{cases}$$



Для построения искомого графика построим график функции $y = x^2 - 4x$ на промежутке $[0; +\infty)$ и график функции $y = x^2 + 2x$ на промежутке $(-\infty; 0)$. Графиком функции $y = x^2 - 4x$ является парабола, ветви которой направлены вверх, вершина имеет координаты $(2; -4)$, точки пересечения с осями координат: $(0; 0)$, $(4; 0)$. Графиком функции $y = x^2 + 2x$ является парабола, ветви которой направлены вверх, вершина имеет координаты $(-1; -1)$, точки пересечения с осями координат: $(0; 0)$, $(-2; 0)$. График данной функции изображён на рисунке.

Прямая $y = c$ имеет с построенным графиком ровно три общие точки при $c = 0$ и при $c = -1$.

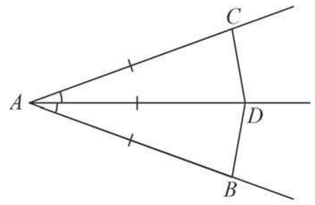
Ответ: график функции изображён на рисунке; прямая $y = c$ имеет с графиком ровно три общие точки при $c = 0$ и при $c = -1$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
График построен правильно, верно указаны все значения c, при которых прямая $y = c$ имеет с графиком ровно три общие точки	4
График построен правильно, но одно из требуемых значений c не указано	3
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0
Максимальный балл	4

Модуль «Геометрия»

24 На сторонах угла BAC, равного 40°, и на его биссектрисе отложены равные отрезки AB, AC и AD. Определите величину угла BDC.

Решение.
Имеем $\angle CAD = 40° : 2 = 20°$; ΔCAD – равнобедренный, $\angle CDA = (180° - 20°) : 2 = 80°$; $\Delta CAD = \Delta BAD$ по двум сторонам и углу между ними, поэтому $\angle BDA = \angle CDA$; $\angle BDC = 2 \cdot 80° = 160°$.



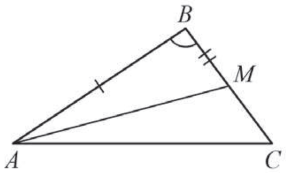
Ответ: 160°.

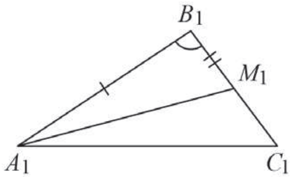
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Правильно выполнены все шаги решения, получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена ошибка или описка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	2

25 Докажите, что у равных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ медианы, проведённые из вершин A и A_1, равны.

Доказательство.

Пусть AM и A_1M_1 — медианы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. В треугольниках ABM и $A_1B_1M_1$ соответственно равны стороны ABи A_1B_1, BM и B_1M_1, а также углы B и B_1. Следовательно, треугольники равны по первому признаку равенства треугольников. Значит, $AM = A_1M_1$, что и требовалось доказать.

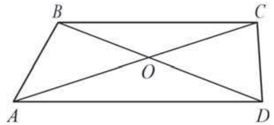




Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы	3
Ход доказательства верный, но отсутствуют некоторые ссылки, например, не указан признак равенства треугольников	2
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0
Максимальный балл	0

26 Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Площади треугольников AOD и BOC равны соответственно $25\ см^2$ и $16\ см^2$. Найдите площадь трапеции.

Решение.



По условию $S_{\triangle AOD} \neq S_{\triangle BOC}$, поэтому AD и BC являются не боковыми сторонами, а основаниями трапеции. Тогда треугольники AOD и BOC подобны по двум углам, а отношение их площадей равно квадрату коэффициента подобия k. Поэтому $k = \frac{5}{4} = \frac{AO}{OC}$. Поскольку треугольники ABO и CBO имеют общую высоту, проведённую из вершины B, отношение их площадей равно отношению их оснований, т. е. $\frac{S_{\triangle ABO}}{S_{\triangle CBO}} = \frac{AO}{OC} = \frac{5}{4}$. Значит, $S_{\triangle ABO} = \frac{5}{4} S_{\triangle CBO} = \frac{5}{4} \cdot 16 = 20$. Площади треугольников ABD и ACD равны, так как эти треугольники имеют общее основание AD, и их высоты, проведённые к этому основанию, равны как высоты трапеции, следовательно

$$S_{\triangle AOB} = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle AOD} = S_{\triangle ACD} - S_{\triangle AOD} = S_{\triangle COD}.$$

Поэтому и $S_{\triangle COD} = 20$; $S_{ABCD} = 25 + 16 + 20 + 20 = 81\ см^2$.

Ответ: $81\ см^2$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	4
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но допущена одна вычислительная ошибка	3
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

Модуль «Алгебра»

21 Упростите выражение $\frac{a-2}{a+1}-\frac{5}{(a+1)^2}:\frac{5}{a^2-1}-\frac{3a+2}{a+1}$.

Решение.

1) $\frac{5}{(a+1)^2}:\frac{5}{a^2-1}=\frac{5(a^2-1)}{(a+1)^2\cdot 5}=\frac{(a-1)(a+1)}{(a+1)^2}=\frac{a-1}{a+1}$.

2) $\frac{a-2}{a+1}-\frac{a-1}{a+1}-\frac{3a+2}{a+1}=\frac{a-2-a+1-3a-2}{a+1}=\frac{-3a-3}{a+1}=-3$.

Ответ: –3.

Комментарий. Ошибки в применении формул, а также в применении правила деления дробей считаются существенными; при их наличии решение не засчитывается.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Все преобразования выполнены верно, получен верный ответ	2
По ходу решения допущена одна ошибка вычислительного характера/описка, с её учётом решение доведено до конца	1
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0
Максимальный балл	2

22 Два оператора, работая вместе, могут набрать текст газеты объявлений за 8 ч. Если первый оператор будет работать 3 ч, а второй 12 ч, то они выполнят только 75% всей работы. За какое время может набрать весь текст каждый оператор, работая отдельно?

Решение.

Пусть первый оператор может выполнить данную работу за x часов, а второй за y часов. За один час первый оператор выполняет $\frac{1}{x}$ часть всей работы, а второй $\frac{1}{y}$.

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{8},\\ \frac{3}{x}+\frac{12}{y}=\frac{3}{4};\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{8},\\ \frac{1}{x}+\frac{4}{y}=\frac{1}{4};\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{8},\\ \frac{3}{y}=\frac{1}{8};\end{cases}\qquad y=24,\quad x=12.$$

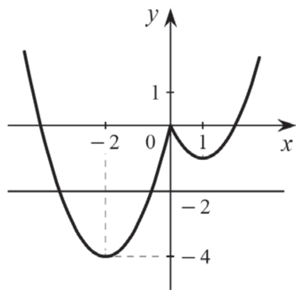
Ответ: первый оператор за 12 ч, второй оператор за 24 ч.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Решение задачи верно, получен верный ответ	3
По ходу решения допущена одна ошибка вычислительного характера/описка, с её учётом решение доведено до конца	2
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0
Максимальный балл	3

23 Постройте график функции $y = x^2 - 3|x| + x$ и определите, при каких значениях c прямая $y = c$ имеет с графиком три общие точки.

Решение.

$$y = x^2 - 3|x| + x; \quad y = \begin{cases} x^2 - 2x, \ x \geq 0, \\ x^2 + 4x, \ x < 0. \end{cases}$$



Для построения искомого графика построим график функции $y = x^2 - 2x$ на промежутке $[0; +\infty)$ и график функции $y = x^2 + 4x$ на промежутке $(-\infty; 0)$. Графиком функции $y = x^2 - 2x$ является парабола, ветви которой направлены вверх, вершина имеет координаты $(1; -1)$, точки пересечения с осями координат: $(0; 0)$, $(2; 0)$. Графиком функции $y = x^2 + 4x$ является парабола, ветви которой направлены вверх, вершина имеет координаты $(-2; -4)$, точки пересечения с осями координат: $(0; 0)$, $(-4; 0)$. График данной функции изображён на рисунке.

Прямая $y = c$ имеет с построенным графиком ровно три общие точки при $c = 0$ и при $c = -1$.

Ответ: график функции изображён на рисунке; прямая $y = c$ имеет с графиком ровно три общие точки при $c = 0$ и при $c = -1$.

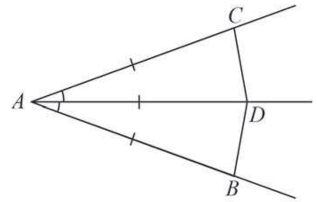
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
График построен правильно, верно указаны все значения c, при которых прямая $y = c$ имеет с графиком ровно три общие точки	4
График построен правильно, но одно из требуемых значений c не указано	3
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0
Максимальный балл	4

Модуль «Геометрия»

24 На сторонах угла BAC, равного 20°, и на его биссектрисе отложены равные отрезки AB, AC и AD. Определите величину угла BDC.

Решение.

Имеем $\angle CAD = 20° : 2 = 10°$; ΔCAD равнобедренный, $\angle CDA = (180° - 10°) : 2 = 85°$; $\Delta CAD = \Delta BAD$ по двум сторонам и углу между ними, поэтому $\angle BDA = \angle CDA$; $\angle BDC = 2 \cdot 85° = 170°$.



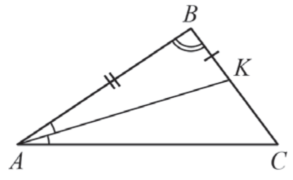
Ответ: 170°.

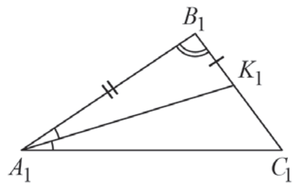
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Правильно выполнены все шаги решения, получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена ошибка или описка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	2

25 Докажите, что у равных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ биссектрисы, проведённые из вершин A и A_1, равны.

Доказательство.

Пусть AK и A_1K_1 — биссектрисы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. В треугольниках ABK и $A_1B_1K_1$ соответственно равны стороны AB и A_1B_1, а также углы B и B_1, BAK и $B_1A_1K_1$. Следовательно, треугольники равны по второму признаку равенства треугольников. Значит, $AK = A_1K_1$, что и требовалось доказать.

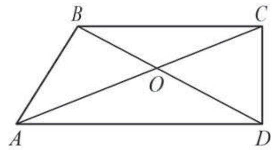




Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы	3
Ход доказательства верный, но отсутствуют некоторые ссылки, например, не указан признак равенства треугольников	2
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0
Максимальный балл	0

26 Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Площади треугольников AOD и BOC равны соответственно 16 см^2 и 9 см^2. Найдите площадь трапеции.

Решение.



По условию $S_{\triangle AOD} \neq S_{\triangle BOC}$, поэтому AD и BC являются не боковыми сторонами, а основаниями трапеции. Тогда треугольники AOD и BOC подобны по двум углам, а отношение их площадей равно квадрату коэффициента подобия k. Поэтому $k = \frac{4}{3} = \frac{AO}{OC}$. Поскольку треугольники ABO и CBO имеют общую высоту, проведённую из вершины B, отношение их площадей равно отношению их оснований, т. е. $\frac{S_{\triangle ABO}}{S_{\triangle CBO}} = \frac{AO}{OC} = \frac{4}{3}$. Значит, $S_{\triangle ABO} = \frac{4}{3} S_{\triangle CBO} = \frac{4}{3} \cdot 9 = 12.$

Площади треугольников ABD и ACD равны, так как эти треугольники имеют общее основание AD и их высоты, проведённые к этому основанию, равны как высоты трапеции, следовательно

$$S_{\triangle AOB} = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle AOD} = S_{\triangle ACD} - S_{\triangle AOD} = S_{\triangle COD}.$$

Поэтому и $S_{COD} = 12$; $S_{ABCD} = 9 + 16 + 12 + 12 = 49$ см^2.

Ответ: 49 см^2.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	4
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но допущена одна вычислительная ошибка	3
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	4

Ответы к заданиям

№ задания	Ответ
1	2
2	4213
3	4
4	-0,75; 0,75 или 0,75; -0,75
5	2
6	24
7	-6
8	123
9	18
10	140

№ задания	Ответ
11	20
12	50 и 130
13	4
14	вторая; 2
15	3
16	45
17	2
18	16
19	0,88
20	37a/20; 1,85a

Ответы к заданиям

№ задания	Ответ
1	3
2	3142
3	0,5
4	0,4; -0,4 или -0,4; 0,4
5	4
6	13
7	4
8	2
9	16
10	130

№ задания	Ответ
11	15
12	70 и 110
13	3
14	первая; 1
15	4
16	550
17	3
18	31
19	0,98
20	37a/200; 0,185a